

Pismeni ispit iz matematike
Zagreb, 23.9.2010.

GRUPA ABc

1. Za koju vrijednost realnog parametra t skup vektora

$$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

čini bazu vektorskog prostora \mathbf{R}^3 ?

- 1'. Odredite inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Odredite domenu te područja rasta i pada funkcije $f(x) = 8 \ln x - 2x$.
- 2'. Odredite ekstreme funkcije $z(x, y) = (x + y^2 + 1) e^x$.
3. Izračunajte $\int 100 x^9 \ln x \, dx$.
- 3'. Ako su granični troškovi

$$T'(Q) = \frac{1}{\sqrt{Q}} + e^Q,$$

i fiksni troškovi $T(0) = 11$, odredite funkciju ukupnih troškova $T(Q)$.

4. Ako na početku prve godine uložimo na štednju 3000 EUR a na početku druge još 1000 EUR te zatim na početku treće i četvrte godine podignemo po 2000 EUR, koliko ćemo imati na štednji na kraju šeste godine uz 6% godišnjih dekurzivnih kamata i složeno ukamaćivanje?
- 4'. Prosječna godišnja stopa prirasta stanovništva jednog grada iznosi 1%. Za koje vrijeme možemo očekivati povećanje broja stanovnika tog grada za 50% ?

Rješenja

GRUPA ABc

1. $t \neq 0$ i $t \neq 1$.

1'.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. $D = \langle 0, +\infty \rangle$, raste na $\langle 0, 4 \rangle$, pada na $\langle 4, +\infty \rangle$.

2'. $\min(-2, 0, -e^{-2})$.

3. $x^{10}(10 \ln x - 1) + C$.

3'. $T(Q) = 2\sqrt{Q} + e^Q + 10$.

4. 686.80 EUR.

4'. $n = 100 \ln 1.5 \approx 40.5$ godina.

Pismeni ispit iz matematike
Zagreb, 23.9.2010.

GRUPA ABC

1. Kako broj rješenja sustava

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= \lambda\end{aligned}$$

ovisi o vrijednosti realnog parametra λ ?

- 1'. Zadana je I-O tabela neke dvosektorske privrede

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 800 | 400 | 300 | 100 |
| 600 | 200 | 150 | 250 |

Odredite pripadne matrice A , T i T^{-1} .

2. Zadana je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = \frac{Q^2}{100} + Q + 100.$$

Za koji opseg proizvodnje Q su prosječni troškovi minimalni i koliko oni iznose?

- 2'. Za funkciju

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x + y + z}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}}$$

odredite:

- (a) stupanj homogenosti,
 - (b) $E_{f,x} + E_{f,y} + E_{f,z} = ?$
 - (c) Za koliko se približno promijeni vrijednost funkcije ako se varijable x , y i z smanje za 10% ?
3. Izračunajte $\int x \sqrt{x^2 + 7} dx$.

→ → →

- 3'. Odredite veličinu površine omeđene sa $y = x^2 - 1$ i $y = 1 - x^2$.
4. Ako danas na štednji imamo 10 000 EUR, koliko još trebamo uložiti na štednju za tri godine da bi za pet godina imali 20 000 EUR? Godišnja dekurzivna kamatna stopa iznosi 3% za prvu i drugu godinu, 4% za treću i četvrtu te 5% za petu godinu a ukamaćivanje je složeno.
- 4'. Investicijski zajam od 99 900 EUR dobiven je na četiri godine otplate uz plaćanje anuiteta krajem svake godine sa jednakim otplatnim kvotama. Napišite otplatnu tabelu ako je godišnja dekurzivna kamatna stopa 6.6%. Napomena: postupak računanja napišite barem za dva reda tabele.

Rješenja

1. Za $\lambda = 5$ sustav ima bekonačno rješenja, za $\lambda \neq 5$ nema rješenja.

1'.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\bar{T}(Q) = \frac{Q}{100} + 1 + \frac{100}{Q}, \quad \bar{T}_{\min}(100) = 3.$$

- 2'. (a) 1/4, (b) 1/4, (c) smanji se približno za 2.6% .

3. $\frac{1}{3}(x^2 + 7)\sqrt{x^2 + 7} + C$.

3'. $P = 8/3$.

4. 7281.66 EUR.

4'.

| k | a_k | I_k | R_k | C_k |
|-----|-----------|----------|--------|--------|
| 0 | — | — | — | 99 900 |
| 1 | 31 568.40 | 6 593.40 | 24 975 | 74 925 |
| 2 | 29 920.05 | 4 945.05 | 24 975 | 49 950 |
| 3 | 28 271.70 | 3 296.70 | 24 975 | 24 975 |
| 4 | 26 623.35 | 1 648.35 | 24 975 | 0 |

Pismeni ispit iz matematike
Zagreb, 23.9.2010.

GRUPA Abc

1. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav

$$\begin{array}{rclcl} 8x & - & y & - & 7z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 8 \\ x & - & y & + & 77z & = & 5 \\ x & & & + & 7z & = & 2 \end{array} .$$

- 1'. U jednom I-O modelu dvosektorske privrede poznato je

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} .$$

Odredite matricu A i napišite pripadnu I-O tabelu.

2. Odredite domenu i točke infleksije funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 9\ln x$.
- 2'. Zadana je funkcija potražnje robe A, $q_1(p_1, p_2) = 7.3p_1^{-0.8}p_2^{1.8}$, gdje je p_1 cijena robe A i p_2 cijena robe B. Odredite koeficijente parcijalne i ukrštene elastičnosti te interpretirajte dobivene rezultate.
3. Izračunajte

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + 2x + e^{2x}} dx .$$

- 3'. Za koju vrijednost parametra $a > 0$ graf funkcije $f(x) = a^2 - x^2$ zatvara sa osi x površinu veličine 288 kvadratnih jedinica?
4. Koliki najveći iznos potrošačkog kredita, na dvije godine otplate uz 25% učešća i 8% anticipativnih godišnjih kamata, može podići osoba sa prosječnom plaćom od 3960 kuna? Napomena: mjesečna rata ne smije prelaziti 1/3 prosječnih mjesečnih primanja.
- 4'. Ako danas uložimo na štednju 10 000 EUR, koliko možemo podići za šest godina da bi za osam godina od danas imali na štednji ponovo 10 000 EUR ako je godišnja dekurzivna kamatna stopa prve četiri godine 5% a zatim 6% a ukamaćivanje složeno?

Rješenja

GRUPA Abc

1. $x = 1, y = 7, z = 1/7.$

1'.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.125 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 100 & 50 & 25 & 25 \\ \hline 200 & 0 & 150 & 50 \\ \hline \end{array}.$$

2. $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle, I(3, 14.38751).$

2'. $E_{q_1, p_1} = -0.8$ ($p_1 \nearrow 1\%, p_2 = \text{const.} \Rightarrow q_1 \searrow 0.8\%$),
 $E_{q_1, p_2} = 1.8$ ($p_2 \nearrow 1\%, p_1 = \text{const.} \Rightarrow q_1 \nearrow 1.8\%$),
pa su A i B supstituti.

3.

$$\frac{1}{2} \ln |1 + 2x + e^{2x}| + C.$$

3'. $\int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 288 \Rightarrow a = 6.$

4. $C = 38\,990.77$ kuna.

4'. 4757.46 EUR.

Pismeni ispit iz matematike
Zagreb, 23.9.2010.

GRUPA abc

1. Odredite rang i determinantu matrice $A \in M_4$ čiji su elementi

$$a_{ij} = i - j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

- 1'. Zadana je I-O tabela neke dvosektorske privrede

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 160 | 80 | 48 | 32 |
| 240 | 64 | 96 | 80 |

Napišite novu tabelu ako se ukupni output prvog sektora poveća za 50% a finalna potražnja drugog sektora smanji za 25%.

2. Zadana je funkcija potražnje neke robe

$$q(p) = \frac{10}{p^2 + 1},$$

gdje je p njezina cijena. Izračunajte koeficijent elastičnosti zadane potražnje u odnosu na cijenu te interpretirajte dobiveni rezultat za $p = 0.50$, $p = 1$ i $p = 3$.

- 2'. Zadane su funkcije ukupnih troškova i ukupnih prihoda

$$T(Q_1, Q_2) = 5Q_1^2 + 8Q_2^2 + 100Q_1 + 200Q_2 + 3000,$$

$$P(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 300Q_1 + 800Q_2 + 2000,$$

gdje su Q_1 i Q_2 količine proizvoda "1" i "2". Za koje količine navedenih proizvoda je dobit najveća i koliko ona iznosi?

3. Izračunajte

$$\int_1^{100} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx .$$

→ → →

- 3'. Za koje funkcije potražnje $q(p)$ je njihova elastičnost jednaka negativnoj cijeni, tj. $E_{q,p} = -p$?
4. Kupac kupuje namještaj za 30 000 kuna potrošačkim kreditom na dvije godine otplate uz 20% učešća i 12% anticipativnih godišnjih kamata. Kolike su ukupne kamate i kolika je mjesečna rata?
- 4'. Ako početkom svake godine, tokom sedam godina, ulažemo na štednju po 4000 EUR, kojim ćemo iznosom raspolagati krajem desete godine uz 4% godišnjih dekurzivnih kamata i složeno ukamaćivanje?

Rješenja

1. $r(A) = 2, \quad |A| = 0$.

1'.

| | | | |
|-----|-----|-----|----|
| 240 | 120 | 52 | 68 |
| 260 | 96 | 104 | 60 |

2.

$$E_{q,p} = \frac{-2p^2}{p^2 + 1} ,$$

$$E_{q,p}(0.5) = -0.4, \quad (p = 0.5 \nearrow 1\%, \Rightarrow q \searrow 0.4\%),$$

$$E_{q,p}(1) = -1, \quad (p = 1 \nearrow 1\%, \Rightarrow q \searrow 1\%),$$

$$E_{q,p}(3) = -1.8, \quad (p = 3 \nearrow 1\%, \Rightarrow q \searrow 1.8\%).$$

2'. $D_{\max}(25, 50) = 16\,500$.

3. 369 .

3'. $q(p) = Ce^{-p}$.

4. $I = 3000$ kuna, $R = 1125$ kuna.

4'. 36 959.55 EUR.